研究 (*) $f''(t)+f(t)=0$

(**) $\underline{f''+f}=\sin t$.

V, 集合, $(+, \cdot, 0)$

基 $\mathcal{B}$. $\dim V$

$[v]_{\mathcal{B}}$ 坐标,

转换矩阵 $P_{C\leftarrow \mathcal{B}}$ $[v]_C = P_{C\leftarrow \mathcal{B}}\cdot [v]_{\mathcal{B}}$

$\underline{M_{m\times n}(\mathbb{R})}$ 和 $\mathbb{R}^{mn}$ "一样"

线性映射:

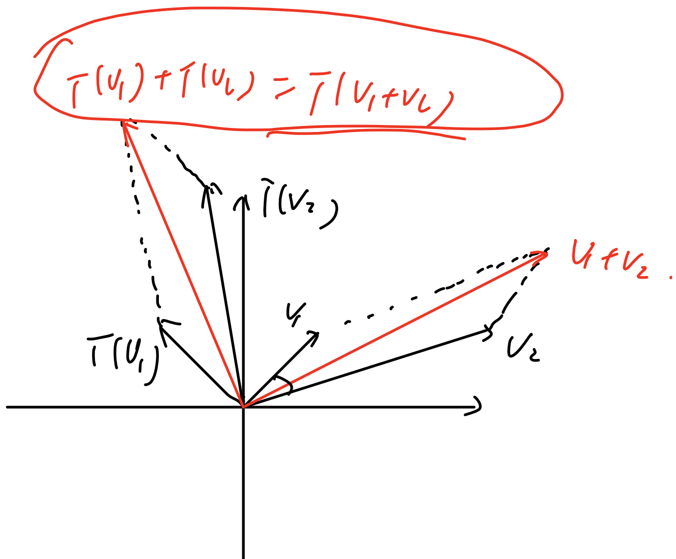
定义: V, W $\mathbb{K}$-线性空间.

$T: V \to W$ 映射 称为线性映射 linear map

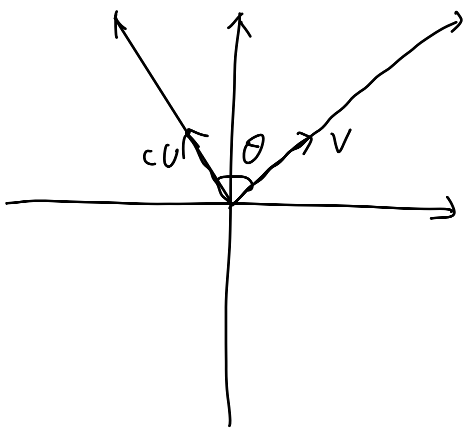
如果 ① $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$

② $T(cv) = c\cdot T(v)$

例子: ① $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 逆时针旋转 θ



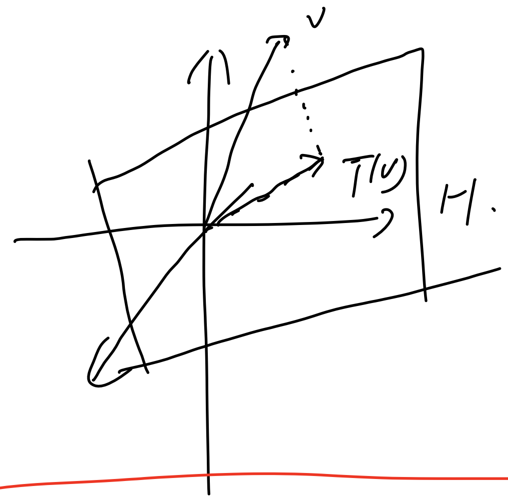
$T(cv) = cT(v)$



④ $T: \quad C^\infty[0,\infty) \to C^\infty[0,\infty)$

$$f(t) \mapsto f'' + f$$

③ $\boxed{\mathbb{R}^n \text{ 投影到超平面 } H \text{ (过原点 } O\text{)}}$ T



例 $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$x \mapsto Ax.$

定义: $\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)} = \{T: V \to W \mid T\ \mathbb{K}\text{-线性映射}\}$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ 上有"自然"加法和 $\mathbb{K}$-数乘

① $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$

② $(c \cdot T)(v) = c(T(v))$

验证: "well-defined". ①, ②

$T_1 + T_2,\ cT \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

验证：$Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$ 也是 $\mathbb{K}$-线性空间.

性质：线性映射 $T_1: V \to W$
（复合） $T_2: W \to Y$.

$$T_2 \circ T_1 \in Hom_{\mathbb{K}}(V, Y)$$

线性映射与矩阵的关系.

① $V = \mathbb{R}^n$. $W = \mathbb{R}^m$.

已有映射 $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$A \longmapsto T_A$$

这是单射和满射.

（回忆：之前定义线性函数）

证明："单射". 若 $T_A = T_B$.

则 $T_A(e_i) =$ A 的第 i 列 $\quad A\cdot e_i$

$= T_B(e_i) =$ B 的第 i 列

$\Rightarrow A = B$

"满射" $T \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

(找到 A，使得 $T = T_A$)

令 $A = [T(e_1), T(e_2) \cdots T(e_n)]$.

$B: e_1 \cdots e_n$

$$T(v) = T\big((e_1, \cdots e_n)[v]_B\big)$$

$$= (T(e_1) \cdots T(e_n))[v]_B$$

$$= A \cdot v = T_A(v)$$

$\Rightarrow T = T_A$

性质：$B = \{v_i\}_{i \in I}$ 是 V 的基。

$T: V \to W$ 线性映射，由 T 在 B 中向量取值"唯一确定"。

换句话说：

对任意 $\{w_i\}_{i \in I}$，$w_i \in W$，存在唯一的 $T \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$，使得 $T(v_i) = w_i$

关键点：$T(a_{i_1}v_{i_1}+\cdots+a_{i_k}v_{i_k})$

$$= a_{i_1}w_{i_1}+\cdots a_{i_k}w_{i_k} \quad (*)$$

如果T存在，则T有(*)

(*)可以"well-defined"定义一个线性映射.

一般的 V, W, $\dim V = n$. $\dim W = m$

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

取定：V 的基 $\mathcal{B}: v_1 \ldots v_n$

W 的基 $\mathcal{C}: w_1 \ldots w_m$.

$$R: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$T \longrightarrow \left[[T(v_1)]_{\mathcal{C}}\ [T(v_2)]_{\mathcal{C}} \cdots [T(v_n)]_{\mathcal{C}} \right]$$

性质：R 是一个双射.

证明：由性质1.

性质：R 也是线性映射.

线性同构： $T: V \to W \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ 是双射.

($\Leftrightarrow$ T 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ 中有左逆和右逆.)

$\Rightarrow$ T^{-1} 也是线性.

定义： 将 $R(T)$ 记作 $[T]_B^C$

称为 T 在 B, C 下的矩阵. (T 的表示矩阵)

性质： ① 换基. V, B_1, B_2 基.

W, C_1, C_2

$T: V \to W$,

相似

$$[T]_{B_1}^{C_1} = P_{C_1 \leftarrow C_2} [T]_{B_2}^{C_2} P_{B_2 \leftarrow B_1}$$

② 复合： $T_1: V_1 \to V_2$

$T_2: V_2 \to V_3$.

V_1 B.

V_2 C 基.

V_3 D

$(T_3 \circ T_2) \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$

$$[T_2 \circ T_1]_B^D = [T_2]_C^D \cdot [T_1]_B^C$$

矩阵乘法.

验证 ① B_1. $v_1 \cdots v_n$ C: $w_1 \cdots w_m$

B_2. $\bar{v}_1, \cdots \bar{v}_n$

$[T]_{B_1}^C$ $[T]_{B_2}^C$

$$[T]_{B_1}^C = \left([T(v_1)]_C, \cdots [T(v_n)]_C\right)$$

$$[T]_{B_2}^C = \left([T(\bar{v}_1)]_C \cdots [T(\bar{v}_n)]_C\right)$$

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = \left([v_1]_{B_2} \cdots [v_n]_{B_2}\right)$$

$$\Rightarrow (v_1 \cdots v_n) = (\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}$$

加法和数乘

$\underline{(T(v_1), \cdots, T(v_n))}$ n个 W 中的向量.

$= T(v_1 \cdots v_n)$

$= T\left((\bar{v}_1, \cdots \bar{v}_n) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}\right)$

$= (T(\bar{v}_1) \cdots T(\bar{v}_n)) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}$

$T(v_1) = (w_1 \cdots w_m) \cdot [v_1]_C$.

$T(v_2) = (w_1 \cdots w_m) \cdot [v_2]_C$

$\vdots$

$$\boxed{(T(v_1) \cdots T(v_n)) = (w_1 \cdots w_m) \cdot [T]_{B_1}^{C}}$$

$= \underline{(T(\bar{v}_1) \cdots T(\bar{v}_n))} \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}$

$= \left((w_1 \cdots w_m) \cdot [T]_{B_2}^{C}\right) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}$

$= (w_1 \cdots w_m) \cdot \left([T]_{B_2}^{C} \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}\right)$

$\Rightarrow [T]_{B_1}^{C} = [T]_{B_2}^{C} \cdot \underline{P_{B_2 \leftarrow B_1}}$

由①，可以定义 $rk(T) = rk[T]_B^C$

（不依赖于基，"内蕴"定义）

不涉及基选取

性质：$\underline{[T(v)]_C = [T]_B^C \cdot \underline{[v]_B}}$.（也可以用来证明①、②）

例子：$T: \mathbb{R}[x]_{deg \le n} \to \mathbb{R}[x]_{deg \le n}$

$$f \longmapsto f'$$

$B = \{1, x, \cdots x^n\}$

有 $[T]_B^B = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots \\ & & & & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1) \times (n+1)}$

$T^{n+1}=0$. $\boxed{rk(T)=n}$

$AB-BA=I_n$ 思考题.

Hint $D: \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ 不是有限维

$$f \mapsto f'$$

左乘 x: $L_x: \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$

$$f \mapsto xf.$$

$$(D\circ L_x - L_x\circ D) = \text{identity}$$

$$(xf)' - xf' = f$$

性质: T 同构 $\Leftrightarrow$ $[T]_B^C$ 可逆.

存在同构 $\Leftrightarrow$ 维数相同

(同构的选取与基有关).

线性变换：$T: V \to V$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$$

取 V 基 B. $[T]_B^B$

C. $\boxed{P[T]_B^B P^{-1}}$ $P = P_{C \leftarrow B}$

定义：A, B 相似 iff $PAP^{-1} = B$.

$A, B \in M_{n\times n}$. $P \in GL_n(\mathbb{K})$

子空间：V 线性空间，W 子集（非空）

① 加法封闭 ←（继承 V 中的 "+" ...）

② 数乘封闭.

$\left(0 \cdot v = \vec{0}, \ (-1) \cdot v = -v \right)$ 验证 W 也是线性空间

例：{上三角阵} $\subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$

① ker. $T: V \to W$ linear

$$\ker T = \{ v \mid T(v) = 0 \}$$

② span. $\text{Span}_{\mathbb{K}}\{v_i\}_{i\in I} = \{a_{i_1}v_{i_1} + \cdots + a_{i_k}v_{i_k}\}$

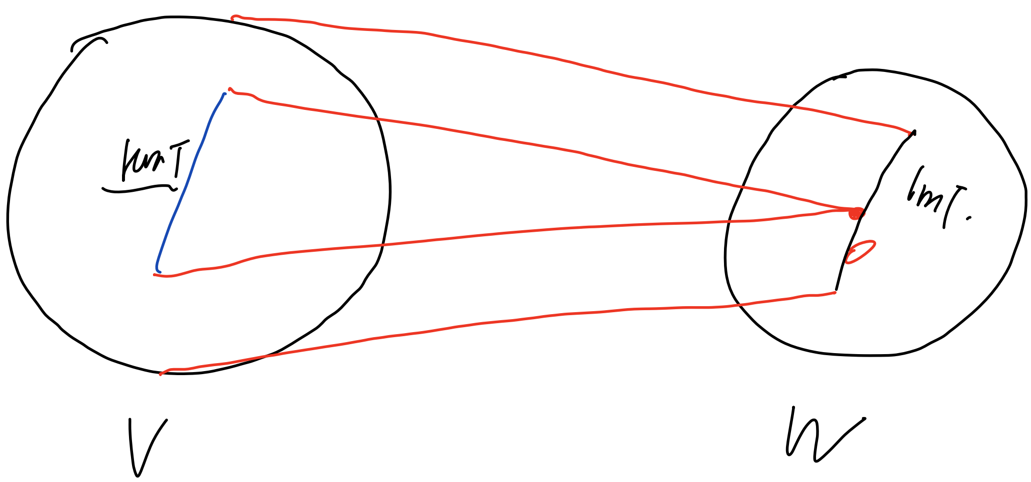
③ Image. $\text{Im}\,T = \{T(v) \mid v\in V\} \subset W$

$(T(0)=0)$

$(T = T_A$ 时, $\text{Im}\,T$ 列空间$)$

维数守恒: $T: V\to W$. $\dim V < \infty$

$$\dim V = \dim\ker T + \dim \text{Im}\,T$$



证明: (sketch). $\ker T$ 的基 $v_1\cdots v_k$.

扩充为 V 的基 $v_1\cdots v_k, v_{k+1}\cdots v_n$

$\text{Im}\,T = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{T(v_1)\cdots T(v_n)\}$

$= \text{span}_{\mathbb{K}} \{ \underbrace{T(v_{k+1}) \cdots T(v_n)} \}$

∵ 习题结论 线性无关 ∴

例：对任意 (x_0, y_0)，$(x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n)$

$x_0, \cdots x_n$ 互不相同，存在多项式

$f(x)$，$\deg f(x) \le n$，$f(x_i) = y_i$．

证明：$T: \mathbb{R}[x]_{\deg \le n} \to \mathbb{R}^{n+1}$．

$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$\underline{\ker T = \{0\}}$ $\dim \operatorname{Im} T = n+1 = \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$．

T $\underline{\text{满射}}$

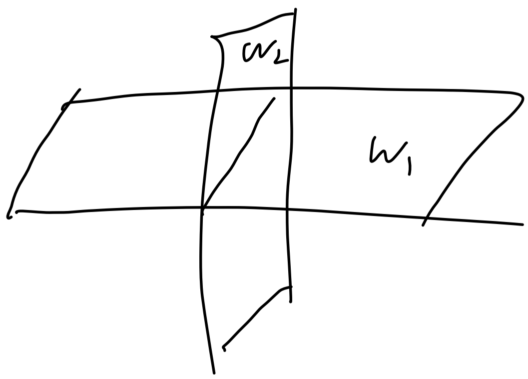
?? $\underline{T \text{ 单射} \iff \ker T = \{0\}}$ ∵习题结论

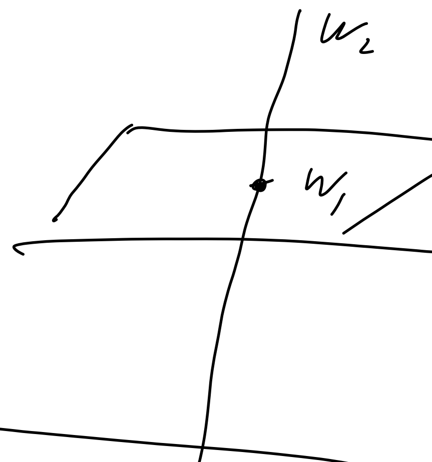
子空间的和.

定义: W_1, W_2 是 V 的子空间.

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i \}.$$

验证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间.





维数公式: $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

找另一个证明:

引入外直和. $V \oplus W = (V \times W, +, \cdot)$

定义: ① $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

② $c \cdot (v, w) = (c \cdot v, c \cdot w)$

$\therefore 0 = (0_V, 0_W)$

$$\dim V \oplus W = \dim V + \dim W$$

$$T: W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 \quad \text{满射}$$

$$(w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2$$

$$\ker T = \{(w, -w) \mid w \in W_1 \cap W_2\}$$

$$\cong W_1 \cap W_2$$

定义: $\underline{W_1 \cap W_2 = \{0\}}$ $\Rightarrow$ $W_1 + W_2$

$$\cong W_1 \oplus W_2$$

称为内直和.